

VI Линейное программирование

1) Постановка задачи ЛП

Общ. зад. ЛП: $Y(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U, U = \{u \in E^n : w_j \geq 0, j \in I, A_1 u = b_1, A_2 u = b_2\}, (1)$ где $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ — заданное мн-во ин-
склад и запас баланс

// лин. функц-я,
// мн-во из сур.эл-тов
// СЛАУ //

29/08

двоек, c, b_1, b_2 - задан. b -ры; A_1, A_2 - заданные m -цы
 канонич. зад. ЛП: $\varphi(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U = \{u \geq 0: Au = b\}$, (2) // рассмотрим этот вар-т //

с-ма ал. ур-й
 Основная форма зад. ЛП: $\varphi(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U = \{u \geq 0: Au \leq b\}$ (3)

Можно г-ть, что все эти зад. $\sim$ м/сбой.

Д-м, что (2) $\sim$ (3). Заметим, что с-му ур-й $Au = b$ можно записать в виде с-мы нер-в:

$$Au = b \Leftrightarrow \begin{cases} Au \leq b \\ Au \geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Au \leq b \\ -Au \leq -b \end{cases}$$

Тогда $U = \{u \geq 0: Au = b\} \Leftrightarrow U_1 = \{u \geq 0: \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U_1$ // Размер-ть возросла в 2 раза: $c \quad A_1 \cdot u \leq b_1$

Д-м, что (3) $\sim$ (2). Введем перем. $v = b - Au \geq 0, \forall u \in U$.
 * зад. $\varphi(z) = \langle c, u \rangle + \langle 0_m, v \rangle \rightarrow \inf, z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in Z$,
 $Z = \{z \geq 0: A_1 z = Au + v = \begin{pmatrix} A \\ I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = b\} \Rightarrow (3) \sim (2)$
 // Проверим в dim... опять: с //

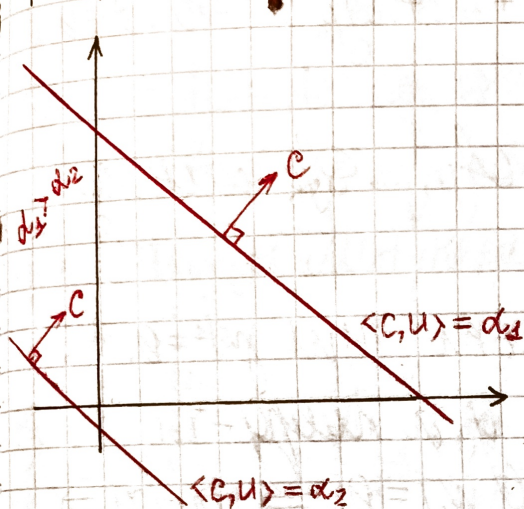
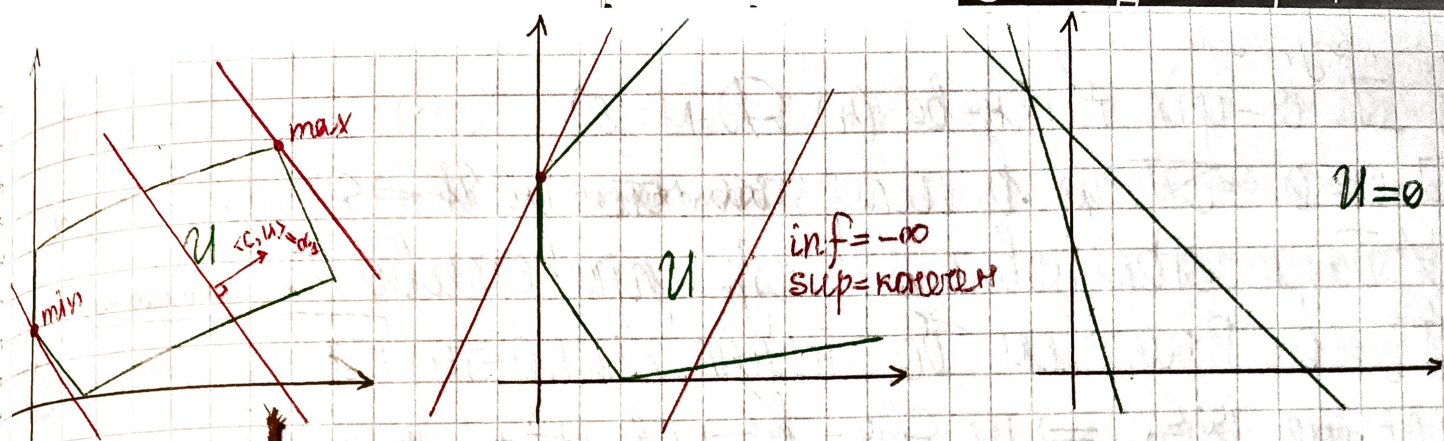
Общ. зад. (1) также можно записать в виде (2) или (3).
 $u = \max_{w_i \geq 0} \{w_i; 0\} - \max_{w_i \geq 0} \{-w_i; 0\}$ // if $w_i > 0$, то $w_i = w_i + 0$;
 if $w_i < 0$, то $w_i = 0 - w_i$ //

Т.е. $u = w_1 - w_2, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0; z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.
 $\varphi(z) = \langle c, w_1 - w_2 \rangle = \langle c, w_1 \rangle - \langle c, w_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, z \rangle \rightarrow \inf, z \in Z$,
 $Z = \{z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \geq 0, A_1(w_1 - w_2) \leq b_1, A_2(w_1 - w_2) = b_2\}$
 $\{A_1 w_1 - A_1 w_2 \leq b_1, (A_1 - A_1) w_2 \leq b_1\} \Rightarrow \{A_1 w_1 \leq b_1, 0 \cdot w_2 \leq b_1\}$
 $\{A_1 w_1 \leq b_1, 0 \cdot w_2 \leq b_1\} \Rightarrow \{A_1 w_1 \leq b_1, 0 \cdot w_2 \leq b_1\}$

2) Геометрич. интерпретация зад. ЛП при $n=2$ (на при-
 мере стандарт. зад.)

$$\varphi(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U = \{u \geq 0: Au \leq b\}$$

// Рисунки на след. стр //



$\langle C, u \rangle = \alpha$ — линия уровня функции (прямая)

$$J'(u) = C$$

$$J_* = -\infty$$

Пример

$$J(u) = x_1 - x_2 \rightarrow \inf, X = \{x \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$$

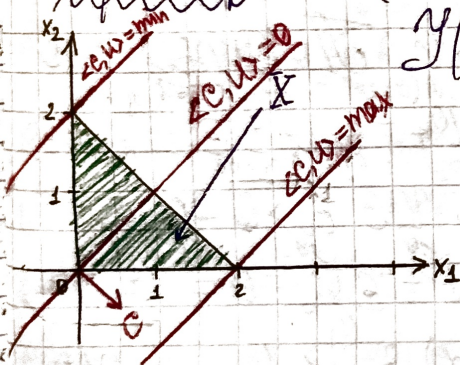
$$J(u) = \langle C, u \rangle, C = (1, -1), u = (x_1, x_2)$$

$$u_{\max} = (2, 0), J = 2$$

$$u_{\min} = (0, 2), J = -2$$

$$u = (1, 1), J = 0$$

// В ЛП реш-я — в углов. т. //



3) Угловая т. мин-ва. Критерий углов. т. мин-ва

$$U = \{u \geq 0: Au = b\} \quad (H)$$

$$0 \quad u_1 \quad u_2$$



Опр III. $v \in U$ наз-ся **угловой т. мин-ва** U , if v не явл-ся внутр. т. никакого отрезка, принадлежащего мин-ву U .

Иначе говоря, представление $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in U$, г/каких-либо $v_1, v_2 \in U$ и $0 < \alpha < 1$ возможно только, if $v_1 = v_2$.

III $\exists U$ -мин-во (H) , м-ца $A \neq 0$, A_j — j -й столбец A , $j = \overline{1, n}$, $r = \text{row } A$. Д/того, чтобы т. $C = (v^1, \dots, v^n) \in U$ была углов. т. мин-ва $(H) \Leftrightarrow A_{j_1} v^{j_1} + \dots + A_{j_r} v^{j_r} = b$; $v_i = 0$ при $j \neq j_1, j_r$ (5), где столбцы $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ — базис. столбцы м-цы A // $v_i \geq 0, i = \overline{1, r}$ // базис. номера

$A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ мин/нез.

$\Rightarrow \square$ ϑ -узн. т. мин-ва (4). А-м (5)

1) $\square \vartheta = 0$. Тогда в силу того, что $\vartheta \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cdot \vartheta = b \Rightarrow b = 0$ и ϑ / V базис столбцов $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ справедливо (5)

2) $\square \vartheta = b$. Выделим все ненулевые координаты $\vartheta^1 > 0, \dots, \vartheta^k > 0$, остальные $\vartheta^i = 0 \Rightarrow$ из $A \vartheta = b \Rightarrow A_{j_1} \vartheta^1 + \dots + A_{j_k} \vartheta^k = b; \vartheta^i = 0$ при $j \neq j_1, j_k$ (6)

Убедимся, что в (6) все столбцы $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ мин/нез.

$\nexists A_{j_1} \gamma^1 + \dots + A_{j_k} \gamma^k = 0$ (7)

Покажем, что это возможно только при $\gamma^1 = 0, \dots, \gamma^k = 0$. Составим в-р $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^k)^T$, у γ координаты $\gamma^1, \dots, \gamma^k = 0$ взяты из (7), остальные $\gamma^j = 0 \Rightarrow$ из (7) $\Rightarrow A \gamma = 0$.

Возьмем т. $\vartheta_+ = \vartheta + \varepsilon \gamma, \vartheta_- = \vartheta - \varepsilon \gamma, \varepsilon > 0$. Покажем, что $\vartheta_{\pm} \in \mathcal{U}$ при всех малых $\varepsilon > 0$. Имеем: $A \vartheta_+ = A \vartheta + \varepsilon A \gamma = b, \forall \varepsilon$. Далее $\vartheta_{\pm}^l = \vartheta^l \pm \varepsilon \gamma^l \geq 0, \forall l = \overline{1, k}, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ - дост. малое число. Остальные координаты: $\vartheta_{\pm}^j = \vartheta^j \pm \varepsilon \gamma^j = 0 \Rightarrow \vartheta_{\pm}^j \geq 0 \Rightarrow \vartheta_{\pm} \in \mathcal{U}$. Имеем $\vartheta = \frac{1}{2} (\vartheta_+ + \vartheta_-) = \alpha \vartheta_+ + (1-\alpha) \vartheta_- | \alpha = \frac{1}{2} - \vartheta / \text{узн. т.}$ т. ϑ это возможно только if $\vartheta_+ = \vartheta_- \Rightarrow \varepsilon \gamma^l = 0, l = \overline{1, k} \Rightarrow \gamma = 0$. Т.о. из (7) $\Rightarrow$ мин/нез-ть столбцов $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ и, тогда мы понимаем, что $k \leq r = \text{rg} A$. Здесь опять возможны 2 случая:

1) if $k=r$, то из (6) $\Rightarrow$ (5);
2) if $k < r$, тогда дополним с-му $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ до базис с-мы столбцами $A_{j_{k+1}}, \dots, A_{j_r}$, а соответствующие столбцы $\vartheta^{j_{k+1}} = 0, \dots, \vartheta^{j_r} = 0$. Тогда (6) $\Rightarrow$ (5). Отметим, что выбор таких столбцов неоднозначен.
 $\Rightarrow \square$ некое т. $\vartheta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^n) \in \mathcal{U}$ удовл. усл. (5), т.е. $A_{j_1} \vartheta^1 + \dots + A_{j_r} \vartheta^r = b, \vartheta^i = 0$ при $j \neq j_1, j_r$. А-м, что ϑ -узн. т.

т.е. представление $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$, $0 < \alpha < 1$, $v_1, v_2 \in U$ (8) возможны только при $v_1 = v_2$, т.е. $v_i^j = v_2^j$ при всех $j = \overline{1, n}$. Снова $\times$ коорд-ты $j \neq j_1, j_r$. Д/таких номеров согласно (5) $\Rightarrow v_j = 0 = \alpha v_1^j + (1-\alpha)v_2^j \Rightarrow v_1^j = v_2^j = 0$, $\forall j \neq j_1, j_r$. Остается убедиться, что д/ остальных коорд-т $j = j_1, j_r$ $v_1^j = v_2^j$. И.к. мы уже знаем, что $v_1^j = v_2^j = 0$, $\forall j \neq j_1, j_r$, то

$$Av_1 = b \Rightarrow b = A_{j_1} v_1^{j_1} + \dots + A_{j_r} v_1^{j_r}$$

$$Av_2 = b \Rightarrow b = A_{j_1} v_2^{j_1} + \dots + A_{j_r} v_2^{j_r} \Rightarrow 0 = A_{j_1} (v_1^{j_1} - v_2^{j_1}) + \dots + A_{j_r} (v_1^{j_r} - v_2^{j_r})$$

И.к. столбцы лнн/независ. $\Rightarrow v_1^j = v_2^j$ при всех $j = \overline{1, n}$ ■

$\|v_1 \in U \Rightarrow Av_1 = b\|$

лнн/нез.

$\Rightarrow v_1 = v_2$, $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 = \text{y.l.}, \alpha \in (0, 1)$

Пример найти y.l.-? $U = \{u = (u^1, \dots, u^4) \geq 0 : \begin{cases} u^1 + u^2 + 3u^3 + u^4 = 3 \\ u^1 - u^2 + u^3 + 2u^4 = 1 \end{cases} \} = \{u \geq 0 : \begin{matrix} A_1 u = b \\ A_2 u = b \end{matrix}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|r=2\|$$

$u \in \mathbb{R}^n$, $r = \text{rg } A$; $Y.l.- \leq C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \{\text{наше усл.}\} = 0$

1) A_1, A_2 $v_1 = (2, 1, 0, 0)$ - y.l.-; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_1^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_1^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{v_1^1 = 2, v_1^2 = 1\}$

2) A_1, A_3 $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ - y.l.-; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_2^1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} v_2^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) A_1, A_4 $v_3 = (5, 0, 0, -2)$ - не y.l.-; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_3^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} v_3^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) A_2, A_3 $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ - y.l.-; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_4^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} v_4^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) A_2, A_4 $v_5 = (0, 0, 1, 0)$ - y.l.-; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} v_5^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} v_5^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) A_2, A_4 $v_6 = (0, \frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3})$ - y.l.-; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_6^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} v_6^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\| \text{Обозн y.l.-} \|$
 $\| (v, B(v)) \|$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\text{т.} \quad \text{тажис}$

$\| \text{Идея симплекс-метода: переход от одной y.l.- к новой: знат-е в новой} < \text{знат-е в старой, т.е. } v_1 \oplus v_2 \rightarrow \dots \Rightarrow J(v_1) > J(v_2) > \dots \|$

4) Приведенная форма $\overset{\text{к y.l.-}}{\text{канон. зад. ЛП}}$
 $J(u) = \langle c, u \rangle \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in E^n : u \geq 0, Au = b\} \quad (1)$

Можем считать, что $r = \text{rg } A = m < n$. $\|r \leq \min\{n, m\}$

If $\text{rg } A = m = n$, то с-ма $Au = b$ имеет! реш-е, и if $u \geq 0$, то мы нашли реш-е, иначе $U = \emptyset$. Это не от. содержат-й случай $\Rightarrow$ далее будем $\times r = m < n$.

Предположим, что $u \neq 0$, и нам известна некотор. ун. т. ϑ , $B(\vartheta) = (A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$, $B(\vartheta) = (j_1, \dots, j_r)$

Наша оптимальная цель — от ун. т. $(\vartheta, B(\vartheta))$ перейти к новой ун. т. $(w, B(w))$: $J(w) < J(\vartheta)$. Это и будет 1 шаг симплекс-метода.

С этой целью преобразулируем зад. (1) в так называемой приведенной к ун. т. $(\vartheta, B(\vartheta))$ форме. Обозначим

$$\bar{\vartheta} = \begin{pmatrix} \vartheta^{j_1} \\ \vdots \\ \vartheta^{j_r} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u^{j_1} \\ \vdots \\ u^{j_r} \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c^{j_1} \\ \vdots \\ c^{j_r} \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

базис. координаты ун. т. ϑ

и столбец A

Тогда, согласно крит-ю ун. т., справедливо представление:

$$\sum_{i=1}^{m=r} A_{ji} u^{ji} = B \bar{\vartheta} = b \Rightarrow \bar{\vartheta} = B^{-1} b \geq 0 \quad (2)$$

Тогда с-му $Au = \sum_{j=1}^n A_j u^j = b$ можем записать в виде:

$$\sum_{i=1}^r A_{ji} u^{ji} + \sum_{j \in B(\vartheta)} A_j u^j = B \bar{u} + \sum_{j \in B(\vartheta)} A_j u^j = b \quad (3)$$

Умножим (3) слева на $B^{-1}(\vartheta)$: $\bar{u} + \sum_{j \in B(\vartheta)} B^{-1}(\vartheta) A_j u^j = B^{-1}(\vartheta) b = \bar{\vartheta}$

(H) Очень важно!!!

$$B^{-1} A_{j_i} = e_i, \quad B^{-1} (A_{j_1}, \dots, A_{j_r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_r)$$

Получ. с-ма (H) и исход. с-ме $Au = b$. Далее займемся ф-лой:

$$\begin{aligned} J(u) &= \langle c, u \rangle = \sum_{j=1}^n c_j u^j = \langle \bar{c}, \bar{u} \rangle + \sum_{j \in B(\vartheta)} c_j u^j \\ &\stackrel{(H)}{=} \langle \bar{c}, \bar{\vartheta} - \sum_{j \in B(\vartheta)} (B^{-1} A_j) u^j \rangle + \sum_{j \in B(\vartheta)} c_j u^j = \langle \bar{c}, \bar{\vartheta} \rangle - \sum_{j \in B(\vartheta)} \langle \bar{c}, B^{-1} A_j \rangle u^j + \\ &+ \sum_{j \in B(\vartheta)} c_j u^j = \langle \bar{c}, \bar{\vartheta} \rangle - \sum_{j \in B(\vartheta)} (\langle \bar{c}, B^{-1} A_j \rangle - c_j) u^j = J(\vartheta) - \sum_{j \in B(\vartheta)} \Delta_j u^j \quad (5) \end{aligned}$$

Т.о. приведенная форма имеет вид $J(u) = J(\vartheta) - \sum_{j \in B(\vartheta)} \Delta_j u^j \rightarrow \inf$, $u \in U = \{u \geq 0, \bar{u} + \sum_{j \in B(\vartheta)} (B^{-1} A_j) u^j = \bar{\vartheta}\}$; $\Delta_j = (\langle \bar{c}, B^{-1} A_j \rangle - c_j)$, $j \in B(\vartheta)$; $B^{-1} A_j = x_j$ (6)

5) Описание одного шага симплекс-метода

Положим $w = 0, j \notin B, j \neq k \Rightarrow J(u) = J(v) - \Delta_k u^k \rightarrow \inf, u \geq 0, \|J(u) < J(v), \text{ if } \Delta_k < 0\|$
 $w^i = v^i - p_{ik} u^k, i = \overline{1, r}. (*) \quad \|u = v - p_k u^k\|$

Усл-е $u \geq 0 \Rightarrow w^i \geq 0, u^k \geq 0; w = 0, j \notin B, j \neq k$. Что мы хотим? Мы хотим перейти от т. $(v, B(v))$ к новому т. $u = w$ ^{$\|Aw = b\|$} с тем же выбором такого $u^k, k \in B$, чтобы новый т. имел вид:

$w = \{ w^i = v^i - p_{ik}, i = \overline{1, r}; w^k = u^k; w^j = 0, j \notin B(v), j \neq k \} \in U (*)$

I. $\Delta_j = \langle \bar{c}, p_j \rangle - c_j \leq 0, \forall j \notin B(v) \Rightarrow c_j \geq \langle \bar{c}, p_j \rangle, \forall j \notin B(v)$

В этом случае $J(u) = J(v) - \sum_{j \in B} \Delta_j u^j \geq J(v), \forall u \in U$. В этом случае $J(v) = J_*, v \in U_*$ - решение зп. (1).

II. $\exists \Delta_k > 0$ при некоем $k \in B$, причем $p_k = B^{-1} A_k \leq 0$.

В этом случае при выборе $u^k > 0$ получаем $J(w) < J(v)$ В этом случае $J_* = -\infty$. $\| \sum \Delta_j u^j = \Delta_k u^k + \sum_{j \neq k} \Delta_j u^j \|$

III. $\exists \Delta_k > 0$ при некоем $k \in B$ и г/ каждого такого k найдется номер $i, i = \overline{1, r}$, такой, что $p_{ik} = (B^{-1} A_k)_i > 0$. Иначе говоря, мн-во индексов $I_k(v) = \{ i : i = \overline{1, r}, p_{ik} > 0 \} \neq \emptyset$ г/ всех $k \in B$, г/ $\Delta_k > 0$. $\| \exists \Delta_k > 0: \forall k \exists i: p_{ik} > 0 \| \quad \| J(u) = J(v) - \sum \Delta_j u^j \|$

1) $i \notin I_k(v)$ - безопасный номер; $\| p_{ik} \leq 0$

2) $i \in I_k(v)$ - опасный номер.

$w^i = v^i - p_{ik} u^k \geq 0 \Leftrightarrow v^i \geq p_{ik} u^k \Leftrightarrow \frac{v^i}{p_{ik}} \geq u^k, \forall i \in I_k(v) \Rightarrow$
 $\Rightarrow u^k = \min_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{p_{ik}} = \frac{v^s}{p_{sk}} \quad (g) \rightarrow \text{из принципа максимума}$

Тогда получим $w = (w^i = v^i - p_{ik} \frac{v^s}{p_{sk}}, i = \overline{1, r}, w^k = \frac{v^s}{p_{sk}}, w^j = 0, j \notin B(v), j \neq k) \quad \| w^j = 0 \|$

$J(w) = J(v) - \Delta_k \frac{v^s}{p_{sk}} \leq J(v) \quad \rightarrow g/1 \text{ наша цель достигнута}$

Д/з (необяз.) $U = \{ u \in E^4: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$
 Найти опт. т. - ?